Soluciones Hoja 5. Pedro Balodis

Problema 1. (hecho en teoría)
Problema 2. Diferenciabilidad de f en los puntos $x = -1$, 0, 3, con

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 0, & -1 \le x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Solución: Si $x = -1$, tenemos

$$\lim_{x\to -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1-} \frac{x+1}{x+1} = 1; \ \lim_{x\to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \frac{0}{x+1} = 0 \Rightarrow \nexists f'(-1)$$

Si $x = 0$, tenemos

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{0}{x} = 0; \ \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

Si $x > 0$, claramente existe $f'(x) = 2x$, y en particular, para $x = 3$.
Problema 3. Probar que si existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \le x^2$, existe $f'(0)$ y calcularlo.

Solución: Tenemos claramente $f(0) = 0$, luego para $0 < |x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - 0 \right| \le |x| \to 0, \ x \to 0 \Leftrightarrow \exists f'(0) = 0$$

Problema 4. Probar, usando la definición, que:

a) Las funciones $f(x) = (x^2|x|+1)^{-1}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\,(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ cumplen $f'(0) = g'(0) = 0$.

Solución: Para g, es consecuencia inmediata del Problema 3, mientras que para f, dado $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\frac{-x^2|x|}{x^2|x|+1} = -\frac{x|x|}{x^2|x|+1} \to 0, \ x \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

b) La función $h(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ no es derivable en $x = 0$ (aunque sí que es continua en $x = 0$):

Solución: Para $x \neq 0$,

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \mathrm{sen}\,(1/x); \ \nexists \lim_{x\to 0} \mathrm{sen}\,(1/x) \Rightarrow \nexists h'(0)$$

Para ver que $\nexists \lim_{x\to 0} \mathrm{sen}\,(1/x)$, consideramos las sucesiones $x_n = (n\pi)^{-1}$, $y_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Ambas sucesiones son no-nulas y tienden a cero, pero $\mathrm{sen}\,(1/x_n) = 1 \to 1$, mientras que $\mathrm{sen}\,(1/y_n) = 0 \to 0$ (sin embargo, $\exists \lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$, luego h es continua en $x = 0$).

Problema 5. Calcular las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \mathrm{sen}\,(x + \dfrac{\cos x}{x})$; $f'(x) = \cos(x + \dfrac{\cos x}{x})(1 - \dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x}{x^2})$

b) $f(x)=\ln(e^{5x}+1)$; $f'(x)=\dfrac{5e^{5x}}{e^{5x}+1}$

c) $f(x)=(x+2^x)e^x=(x+e^{x\log 2})e^x$; $f'(x)=(1+\log 2\cdot 2^x)e^x+(x+2^x)e^x$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}=x(100-x^2)^{-1/2}$; $f'(x)=(100-x^2)^{-1/2}+(100-x^2)^{-3/2}x^2$

e,f) (superan mi paciencia)

Problema 6. ¿Qué es $(fg)^{(3)}$? ¿y $(e^f)''$?.
Solución:

$$\begin{aligned}(fg)^{(3)}=(fg)''' &= [(fg)']'' \\ &= [f'g+g'f]'' \\ &= [f''g+2f'g'+fg'']' \\ &= f'''g+3f''g'+3f'g''+g'''\end{aligned}$$

[Nota: En general, para $k=0,\,1,\,2,\ldots$, $(fg)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(j)}g^{(k-j)}$, que puede probarse por inducción, usando que $\binom{k+1}{j}=\binom{k}{j}+\binom{k}{j-1}$ (fórmula de Pascal)]

$$\begin{aligned}(e^f)'' &= [e^f f']' \\ &= e^f[(f')^2+f'']\end{aligned}$$

Problema 7. La fórmula de la *derivación logarítmica* afirma que $f'(x)=f(x)(\log f(x))'$ (*a priori*, la fórmula es válida si f es diferenciable y es >0, pero a menudo se aplica omitiendo ésa última restricción). Usarla para calcular:

a) Las derivadas de:

- $f(x)=(x^2+1)^7(e^x+1)(\cos x+\operatorname{sen} x)$:

$$\log f(x)=7\log(x^2+1)+\log(e^x+1)\log(\cos x+\operatorname{sen} x)$$

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{14x}{x^2+1}+\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x+\operatorname{sen} x}\right]$$

- $g(x)=(x^2+1)^{x^2+1}$:

$$\log g(x)=(x^2+1)\log(x^2+1)$$

$$g'(x)=g(x)\left[2x\log(x^2+1)+2x\right]$$

b) Derivar $f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=\prod_{j=1}^{n}f_j(x)$:

Solución:

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n}f_j(x)\right)=\sum_{j=j}^{n}\log f_j(x)\Rightarrow\left[\log\left(\prod_{j=1}^{n}f_j(x)\right)\right]'=\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(x)'}{f_j(x)}\qquad(1)$$

De (1) se deduce entonces que

$$\begin{aligned}\left[\prod_{j=1}^{n}f_j(x)\right]' &= \prod_{k=1}^{n}f_k(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(x)'}{f_j(x)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}f_j(x)'\prod_{k=1,k\neq j}^{n}f_k(x)\qquad(2)\end{aligned}$$

La fórmula (2) obtenida, en principio sólo sería válida si $f_1, \ldots, f_n$ son diferenciables y > 0, pero tiene sentido sólo con que $f_1, \ldots, f_n$ sean diferenciables, y de hecho es válida también en ése caso (una vez obtenida la fórmula, puede probarse, por ejemplo, por inducción en el número de factores).

Problema 8. Determinar rectas tangentes r a las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x),\ x = 0$: **Solución:** $r \equiv y = (1 + e^{-1})x + 1$.

b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x,\ x = \pi/6$: **Solución:** $r \equiv y = \sqrt{3}(x - \pi/6) + 1/2$.

Problema 9. Determinar dónde la recta tangente r a la gráfica de $f(x) = x^2$ en x_0 (arbitrario) corta el eje real:

Solución: Es inmediato que $r \equiv y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = x_0(2x - x_0)$, luego $y = 0 \Leftrightarrow x = x_0/2$, $x_0 \neq 0$ (si $x_0 = 0$, $r \equiv y = 0$).

Problema 10. Determinar $a \in \mathbb{R}$ parámetro para que, con función $f(x) = x^2 - 5ax$ la recta r tangente a su gráfica en el origen sea:

a) Horizontal: **Solución:** Puesto que $f'(x) = 2x - 5a$, $f'(0) = 5a$, luego $f'(0) = 0 \Rightarrow a = 0$.

b) Tenga pendiente -1: **Solución:** Puesto que $f'(0) = 5a$, luego $f'(0) = -1 \Rightarrow a = -1/5$.

Problema 11. Considerando la recta tangente r a $f(x) = e^x$ en $x = 0$, probar la desigualdad $e^x \geq 1 + x\, \forall x$:

Solución: Es inmediato que $r \equiv y = x + 1$, por lo cual, la interpretación geométrica de ésa desigualdad es que la gráfica de e^x se mantiene siempre por encima de ésa tangente. Para probar ése hecho, consideramos $g(x) = e^x - 1 - x$. Ésta función es diferenciable con $g(0) = 0$, $g'(x) = e^x - 1$, luego, como $e^x > 1$, $x > 0$, $0 < e^x < 1$, $x > 0$, $g' > 0$ en $(0, \infty)$, luego g es creciente en $[0, \infty)$ y $g(x) \geq g(0) = 0$, $x \geq 0$. Asimismo, $g' < 0$ en $(-\infty, 0)$, luego g es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $g(x) \geq g(0)$, $x \leq 0$. En ambos casos, $g(x) \geq 0\, \forall x$.

Problema 12. Considerando la fórmula

$$1 + x + \ldots + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},\ x \neq 1$$

encontrar fórmulas para:

a) $x + 2x^2 \ldots + nx^n = \sum_{j=1}^{n} jx^j$:

Solución: Derivando la fórmula anterior, obtenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right)' = \sum_{j=1}^{n} jx^{j-1} = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},\ x \neq 1 \qquad (1)$$

Pero

$$\sum_{j=1}^{n} jx^j = x \sum_{j=1}^{n} jx^{j-1} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} jx^j = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2},\ x \neq 1 \qquad (2)$$

En particular, para $x = 2$, obtenemos $\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

(<u>Observación:</u> La fórmula (2) la hemos obtenido por derivación a partir de otra fórmula conocida, pero es también fácil, una vez obtenida, tratar de probarla por inducción. Asimismo, usando que $nx^n \to 0$, $n \to \infty$, $|x| < 1$, de (1) se obtiene que la suma de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}$ es $1/(x-1)^2$, $|x| < 1$.)

b) $1^2 + 2^2x + \ldots + n^2x^n = \sum_{j=1}^n j^2x^j$:

Solución: Derivando la fórmula de a), obtenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{n} jx^j\right)' = \sum_{j=1}^{n} j^2x^{j-1} = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}\right)'$$

que tras cierto trabajo, puede expresarse como

$$\sum_{j=1}^{n} j^2x^{j-1} = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}, \ x \neq 1 \quad (3)$$

de dónde

$$\sum_{j=1}^{n} j^2x^{j} = \frac{n^2x^{n+3} - (2n^2+2n-1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}, \ x \neq 1 \quad (4)$$

En particular, para $x = 2$, obtenemos $\sum_{j=1}^n j^2 2^j = (n^2+1)2^{n+2} - 6$, $n \in \mathbb{N}$ (de igual modo, para $|x| < 1$, obtenemos que la suma de la serie $\sum_{j=1}^\infty j^2x^j$ es $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$).

Problema 13. Las funciones $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$ se consideran como funciones de $(0,1)$ en $(0,\pi/2)$. Sabiendo que $f'(x) = -g'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, obtener una relación para $f+g$:

Solución: Como entonces $(f+g)' = 0$, $f+g$ es constante. Evaluando en $x = 1/2$ obtenemos la fórmula:

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ 0 < x < 1 \qquad (1)$$

(Observación: Como f y g son continuas en $[-1,1]$ y diferenciables en $(-1,1)$, lo mismo vale para su suma $f+g$, y como $(f+g)' = 0$ en $(-1,1)$, f es constante en $[-1,1]$ y deducimos que (1) en realidad es válida en $[-1,1]$).

Problema 14. Si $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, f se denomina *seno hiperbólico* y su inversa $f^{(-1)}$ *arcoseno hiperbólico*. Hay que ver que tal inversa está bien definida con $(f^{(-1)})(x)' = (1+x^2)^{-1/2}$:

Solución 1: Como $f(x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, f continua y estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, y como claramente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (basta verlo con $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pues f es claramente impar, y para ello, escribimos

$f(x) = \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\to\infty, x\to\infty} \underbrace{(1 - e^{-2x})}_{\to 1, x\to\infty} \to \infty$, $x \to \infty$), de dónde por la continuidad de f y el Teorema de Valores Intermedios (para funciones continuas), f es una biyección continua de $\mathbb{R}$ en sí mismo, de dónde tiene una inversa bien definida $f^{(-1)}(x) := \operatorname{arcsenh} x$, que es además diferenciable, pues $f'(x) \neq 0 \, \forall x$, y la derivada de su inversa cumple

$$(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{f'(\operatorname{arcsenh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsenh} x)}; \ \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

Usando la identidad de fácil comprobación $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x \, \forall x$ (2), de (1) y (2) obtenemos

$$\cosh^2(\operatorname{arcsenh} x) = 1 + \operatorname{senh}^2(\operatorname{arcsenh} x) = 1 + x^2 \qquad (3)$$

Puesto que $\cosh t > 0$, $\forall t$, se sigue de (3) que $\cosh(\operatorname{arcsenh} x) = \sqrt{1+x^2}$, de dónde

$$(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x$$

Solución 2: Usando que $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} = \dfrac{(e^x)^2-1}{2e^x}$, si escribimos $y = f(x)$,

$$y = \frac{(e^x)^2-1}{2e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 - (2y)e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{1+y^2} \qquad (4)$$

Si en (4) tomáramos la solución $y - \sqrt{1+y^2}$, tendríamos $e^x < 0$, lo cual es absurdo, luego $e^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$. Por tanto, cambiando los papeles de x e y,

$$\operatorname{arcsenh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad (5)$$

Derivando (5), inmediatamente se obtiene la fórmula del ejercicio.

Problema 15. Hallar una fórmula para la derivada segunda de una función inversa.

Solución: Primero de todo, hay que especificar algo más las hipótesis sobre f. Suponiendo $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, primero de todo no podemos esperar que su inversa tenga dos derivadas sin que la propia f las tenga, luego supondremos:

i) f'' está bien definida en (a,b).

ii) $f' \neq 0$ en (a,b).

(sin la condición ii), no podemos esperar que $f^{(-1)}$ sea diferenciable, si es que existe, y en cuanto a que esté definida en un intervalo abierto, es más conveniente porque la condición "si $x \in (a,b)$, $\exists \delta > 0$ con $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$ se cumple en todos sus puntos). Veamos que si cumplen ésas condiciones mínimas, $f^{(-1)}$ está bien definida y tiene dos derivadas:

Puesto que $f''(x)$ existe en todo x de (a,b), éso garantiza que f' es continua en todo x de (a,b). Como además $f' \neq 0$, por el Teorema de Bolzano, f' debe tener signo constante ($f' > 0$ en (a,b) o $f' < 0$ en (a,b), pues si no fuera así, existiría $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = 0$, en contra de la hipótesis $f' \neq 0$). Entonces f ha de ser estrictamente monótona, y siendo continua éso garantiza que f es una biyección entre (a,b) y $(c,d) = f((a,b))$. Por tanto, por el Teorema de la Función inversa, $f^{(-1)} : (c,d) \mapsto (a,b)$ es diferenciable con

$$f^{(-1)}(x)' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))} \Leftrightarrow (f^{(-1)})' = [f' \circ f^{(-1)}]^{-1} \qquad (1)$$

Por el Teorema de continuidad de funciones compuestas y por existir f'', la función $(f^{(-1)})'$ es derivable, y aplicando la Regla de la Cadena (varias veces seguidas),

$$\begin{aligned} (f^{(-1)})'' &= \left\{[f' \circ f^{(-1)}]^{-1}\right\}' \\ &= -[f' \circ f^{(-1)}]^{-2}[f' \circ f^{(-1)}]' \\ &= -[f' \circ f^{(-1)}]^{-2}\left[f'' \circ f^{(-1)}\right]^{-1} \end{aligned}$$

(<u>Observación:</u> Si hubiéramos supuesto que $\exists f^{(k)}$, $k \geq 1$ y $f' \neq 0$, puede justificarse por inducción en k que la inversa $f^{(-1)}$ está bien definida y tiene k derivadas, pero hay que abstenerse de pensar que pueda darse una fórmula simple para ésas derivadas).

Problema 16. Éste problema trata de explicar el procedimiento aproximado para encontrar soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$ llamado *Método de Newton* o también *Regula Falsi* (falsa regla), que consiste, si partimos de un punto x_0 que pensamos que está cerca de una solución de $f(x) = 0$, aproximar f por la recta tangente a f en x_0 y como siguiente punto x_1 tomamos dónde corta ésa tangente el eje X (del uso de tal aproximación viene la denominación *Regula Falsi*), y así sucesivamente.

a) Comprobar que la sucesión de puntos x_n está dada por la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0 \qquad (1)$$

Solución: Basta verlo con $n = 0$, y la recta r tangente a f en x_0 es $r \equiv y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, luego si $y = 0$ obtenemos

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(**Observación:** La relación de recurrencia dada por (1) puede expresarse como $x_{n+1} = \Psi(x_n)$, $n \geq 0$, siendo $\Psi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Es inmediato comprobar que si x_0 es una solución de $f(x) = 0$, $x_1 = \Psi(x_0) = x_0$, o lo que es lo mismo, x_0 es un <u>punto fijo</u> de Ψ).

b) Explicar porqué cabe imaginar que éste procedimiento da rápidamente "buenas aproximaciones" a la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b.1) Podemos considerar una primera situación dónde f se comporte como una potencia $a(x - c)^k$, $a \neq 0$ (con $k = 1, 2, \ldots$, que da posibles órdenes de tangencia de f al eje X en el punto $x = c$ dónde se anula). En éste caso, si partimos de un $x_0 \neq c$, la función Ψ de a) viene dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \Psi(x_0) = x_0 - \frac{a(x_0 - c)^k}{ka(x_0 - c)^{k-1}} = x_0 - \frac{x_0 - c}{k} \\ &= c + \left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_0 - c) \qquad (1) \end{aligned}$$

Iterando éste esquema, obtenemos de (1)

$$x_n = c + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n (x_0 - c),\ n \geq 1 \qquad (2)$$

y (2) implica claramente de $x_n \to c$, $n \to \infty$, pues $0 < 1 - 1/k < 1$ (de hecho obtenemos convergencia de velocidad "geométrica", aunque tanto peor cuando mayor sea el orden de tangencia de f en $x = c$, salvo en el caso $k = 1$, que da directamente la solución exacta tras la primera iteración).

b.2) Consideremos el caso más habitual dónde $f(c) = 0$, $f'(c) \neq 0$ (geométricamente ésto quiere decir que en el cero $x = c$ de f, la gráfica de f corta el eje X con pendiente no-nula). Si admitimos que la segunda derivada f'' es continua en un intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$ de radio $\delta > 0$ centrado en $x = c$, la primera derivada f' es continua (por existir f'') y si $f'(c) \neq 0$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que f' tenga en $(c - \delta, c + \delta)$ el mismo signo que $f'(c) \neq 0$. Éso garantiza que en $(c-\delta, c+\delta)$ $\Psi(x)$ está bien definida, tenemos claramente $\Psi(c) = c$ y

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \end{aligned}$$

de dónde Ψ' está bien definida y es continua en $(c-\delta, c+\delta)$ con $\Psi'(c) = 0$. Según veremos cuando estudiemos Polinomios de Taylor, ésto garantiza que existen constantes $\delta' \in (0, \delta]$ y $C > 0$ tales que si

$$|x - c| < \delta' \Rightarrow |\Psi(x) - c| \leq C(x-c)^2 \qquad (1)$$

Supongamos además que partimos de un punto inicial x_0 bastante próximo a $x = c$. Entonces (1) implica que podemos garantizar eligiendo de partida un $\delta > 0$ lo bastante pequeño, que siempre que

$$x_0 \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow |x_1 - c| = |\Psi(x_0) - c| < \min\{1, |x_0 - c|\}$$

Veamos entonces que partiendo de la aproximación inicial x_0, las sucesivas x_n no sólo convergen a c, sino que lo hacen "de forma ultrarrápida": ante todo, como $|x_1 - c| < |x_0 - c|$, $x_1 \in (c - \delta, c + \delta)$, y

$$|x_2-c| = |\Psi(x_1)-c| \leq C(x_1-c)^2,\ |x_3-c| = |\Psi(x_2)-c| \leq C(x_2-c)^2 \leq C^2(x_1-c)^{2^2}$$

Continuando ése proceso n pasos,

$$|x_{n+1} - c| \leq C^n |x_1 - c|^{2^n},\ n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Puesto que $|x_1 - c| < 1$, entonces $C^n|x_1 - c|^{2^n} \to 0$, $n \to \infty$, pero no sólo éso, sino que mientras que en una convergencia geométrica del tipo $|x_n - c| \leq Cr^n$, $0 < r < 1$ el número de cifras decimales correctas de las sucesivas aproximaciones x_n de $x = c$ crecen linealmente con n, en la aproximación anterior tal número de cifras correctas crece geométricamente con n; a tal tipo de fenómeno se le suele denominar "superconvergencia".

Sin embargo no todo son ventajas con el método de Newton: si estamos de partida cerca de una solución y se cumplen las condiciones mencionadas, éste proceso permite encontrar aproximaciones sucesivas de manera muy eficaz, pero si la ecuación $f(x) = 0$ tiene varias soluciones, se puede ver fácilmente que $\Psi(x)$ no va a estar siempre bien definida (a consecuencia del Teorema de Rolle, f' se ha de anular entre dos soluciones de la ecuación $f(x) = 0$), y además aún si partiendo de diferentes puntos iniciales x_0 las sucesivas aproximaciones x_n convergen, pueden hacerlo a valores diferentes (en tal caso, a diferentes soluciones de la ecuación $f(x) = 0$). Por ello, también es necesario poder contar con procedimientos para poder dar aproximaciones sucesivas de la solución de $f(x) = 0$, que si bien no van a tener ésa "superconvergencia", estén libres de las dificultades que puede presentar a priori el método de Newton.

Método de Bisección: Aquí se trata de estudiar un método para determinar soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ de manera *incondicional*; de hecho, el método que se describe a continuación da una prueba semiconstructiva del Teorema de Bolzano (recordemos que tal Teorema afirma que si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en

$[a, b]$ y sus valores $f(a)$, $f(b)$ son no-nulos de signos opuestos, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$):

Supongamos $f(a) < 0 < f(b)$. Dividimos $I_1 = [a, b] = [a_1, b_1]$ en dos mitades $I_1^2 = [a, \frac{a+b}{2}]$, $I_2^2 = [\frac{a+b}{2}, b]$. Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, ya tenemos una solución c de $f(x) = 0$ en (a, b), y si no es así, o bien en I_1^1 o en I_2^1 f tiene valores no-nulos y de signos opuestos en los extremos. Denominando I_2 al correspondiente intervalo dónde se cumpla tal cosa, si $I_2 = [a_2, b_2]$, procedemos como antes a dividir I_2 en dos mitades $I_1^3 = [a_1, \frac{a_1+a_2}{x}]$, $I_2^3 = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_2]$ y de nuevo, en uno de ésos dos intervalos (que denominaremos I_3; $I_3 \subset I_2 \subset I_1$) la función bien se anula en uno de sus extremos, o bien toma valores no-nulos y de signos opuestos en ellos. Prosiguiendo éste proceso n pasos, o bien acabamos localizando un punto $x_n \in (a, b)$ dónde $f(x_n) = 0$, o si el proceso continúa indefinidamente, producimos una sucesión de puntos $x_n \in I_n$ con $[a, b] = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$. Como $long(I_n) = 2^{n-1}(b-a) \to 0$ y los intervalos I_n están encajados, la sucesión $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente a cierto $x_0 \in (a, b)$. Puesto que f continua en x_0 garantiza $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, tenemos

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0,\,\forall n}, \;\; f(x_0) = 0$$

y por tanto, x_0 es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Problema 17. Aproximar las soluciones de $3t - 4t^3 = 1/2$, $0 < t < 1$:

a) Con el método de Newton, partiendo de $t_0 = 0$ y dos iteraciones.

Solución: Primero, observemos que si $f(t) = 3t - 4t^3$, $0 \leq t \leq 1$, $f(0) = 0 < 1/2 < 1 = f(1/2)$, luego la ecuación tiene alguna solución en $(0, 1/2)$. Asimismo, $f'(t) = 3 - 12t^2 < 0$, $0 < t < 1/2$, de dónde f es estrictamente creciente en $[0, 1/2]$ y entonces la ecuación $f(t) = 1/2$ tiene solución única en $(0, 1/2)$ (de hecho, tiene otra solución en $[1/2, 1]$, pues ahí f es estrictamente decreciente y $f(1) = -1 < 1/2$). Puesto que $f(t) = 1/2 \Leftrightarrow g(t) := f(t) - 1/2 = 0$, con ésta función g, calculando la Ψ correspondiente según el procedimiento del Problema 16, obtenemos

$$\Psi(t) = t - \frac{g(t)}{g'(t)} = t - \frac{3t - 4t^3 - 1/2}{3 - 12t^2} = \frac{1 - 32t^3}{6 - 24t^2}$$

y entonces,

$$t_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \Psi(t_0) = \frac{1}{6} = 0,1666\ldots \Rightarrow t_2 = \Psi(t_1) = 0,1736111\ldots$$

Si aplicamos el Método de Bisección y queremos alcanzar 4 cifras decimales correctas, necesitamos un número n de iteraciones tal que $2^{n-1} \cdot 1/2 < 10^{-4}$, lo cual proporciona $n \geq 13$. Como tal cosa, como es lógico, desborda mi paciencia, bisecando $[0, 1/2]$ obtenemos que como $f(1/4) = 11/16 > 1/2$, la solución $c \in (0, 1/4 = 0,25)$. Bisecando $(0, 0,25)$ y usando que $f(0,125) < 1/2$, $c \in (0,125, 0,25)$, y así seguiríamos, hasta alcanzar la precisión requerida.